

11. Drzewa decyzyjne i użyteczność decyzji

11.1. Wprowadzenie

Niniejszy rozdział wprowadza nas w problematykę decyzji sekwencyjnych, a przede wszystkim przedstawia sposób uwzględnienia preferencji decydenta, jego skłonności lub awersję do ryzyka. Wkraczamy tym samym w problematykę podejmowania decyzji w warunkach niepewności.

Rozwiązanie procesu decyzyjnego w warunkach niepewności, polegające na wyznaczeniu optymalnej decyzji, może być przedstawione na wykresie, zwanym dendrytem, lub – jak przyjęto ten wykres nazywać w teorii podejmowania decyzji – drzewem decyzyjnym. Drzewo decyzyjne jest wygodnym narzędziem w analizie procesów decyzyjnych, zwłaszcza gdy procesy te charakteryzują się pewnym stopniem skomplikowania. Narzędzie to umożliwia ukazanie anatomii danej decyzji ([1–2], [8], [11], [18], [20]). Analiza procesu decyzyjnego za pomocą drzewa decyzyjnego nosi nazwę ekstensywnej formy analizy [16].

Drzewo decyzyjne składa się z szeregu tzw. węzłów i gałęzi. Alternatywne kierunki działania są rozpatrywane przez główne gałęzie, z kolei mają gałęzie pomocnicze dla powiązania możliwych zdarzeń występujących w kolejności chronologicznej. Oprócz struktury alternatyw drzewo zwykle ukazuje wypłaty dla każdej ścieżki (gałęzi) oraz prawdopodobieństwa wystąpienia różnych możliwych zdarzeń. Oprócz przedstawienia ogólnego obrazu sytuacji decyzyjnej, drzewa decyzyjne mogą także uzasadniać kryteria decyzyjne i określać informację niezbędną do podjęcia decyzji.

Niestety, nie ma jednego, najlepszego sposobu tworzenia drzewa decyzyjnego. Jego konstruowanie powinno być ograniczone do decyzji i zdarzeń, których konsekwencje decydent pragnie porównać. Zwykle przed przystąpieniem do rozwiązania problemu za pomocą drzewa decyzyjnego należy odpowiedzieć na cztery podstawowe pytania ([9], [14], [19]):

- Jakie są możliwe alternatywy decyzyjne?
- Jakie wyniki mogą dać poszczególne decyzje i jakie są wartości odpowiednich wypłat?
- Jakie są prawdopodobieństwa poszczególnych stanów natury, a czego w danej sytuacji przewidzieć nie można?
- Jakie są kryteria decyzyjne, tzn. na jakiej podstawie decydent dokonuje wyboru?

Konstruowanie drzewa decyzyjnego zaczynamy od punktu zwanego węzłem decyzyjnym, przedstawianym jako kwadrat. Z niego wychodzą linie reprezentujące decyzje. Wynik podjęcia każdej decyzji zależy od tego, który z możliwych stanów natury wystąpi, co jest oczywiście sprawą losową. Te możliwe wyniki są reprezentowane przez linie wychodzące z tzw. węzłów losowych, czyli węzłów

¹⁶Oleg Kapliński, prof. dr hab. inż., Politechnika Poznańska, Wydział Architektury, Instytut Architektury i Planowania Przestrzennego (IAP), 60-965 POZNAŃ, ul. Nieszawska 13C

prawdopodobieństwa, oznaczanych przez kółka lub punkty. Wreszcie trzeba oszacować poszczególne wielkości rozpatrywane w analizie, a w szczególności prawdopodobieństwa poszczególnych zdarzeń i wyników działań oraz koszty i zyski zdarzeń i działań.

Po zbudowaniu drzewa decyzyjnego wraz z wpisaniem wszystkich niezbędnych danych można przystąpić do analizy problemu decyzyjnego. Decydent dysponuje już porządkiem chronologicznym zarówno alternatyw decyzyjnych (które podlegają woli decydenta), jak i stanami natury, które są od niego w części lub całkowicie niezależne, a więc mają charakter probabilistyczny. Analiza polega na przesuwaniu się od gałęzi do pnia, w stronę początkowego węzła decyzyjnego. W każdym węźle decyzyjnym:

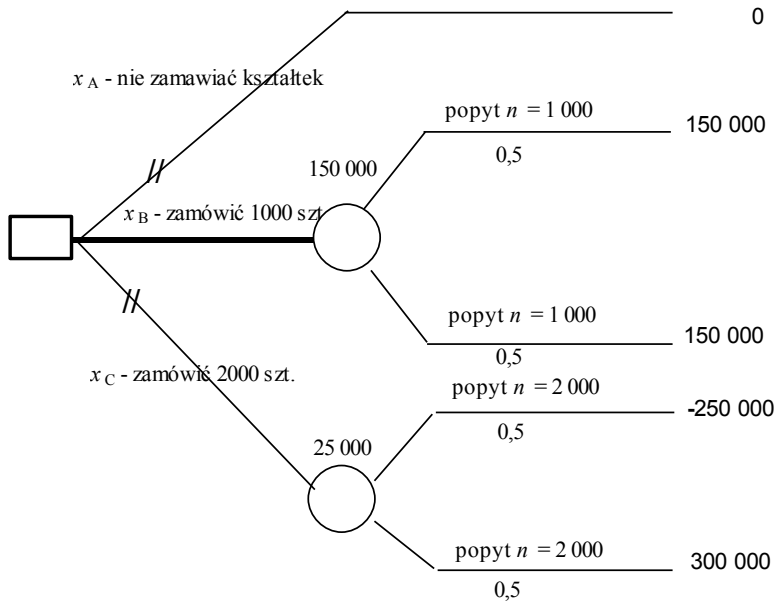
- oblicza się oczekiwane wartości (np. pieniężnych) dla wszystkich możliwych wariantów decyzyjnych,
- dokonuje się wyboru wariantu, któremu odpowiada maksymalna wartość oczekiwana.

Szacowane wypłaty dla wszystkich węzłów wpisuje się na diagram, przy czym wypłata węzła losowego to ważona suma wypłat węzłów decyzyjnych, które po nim występują. Tymi wagami są prawdopodobieństwa. Podobnie, wypłata węzła decyzyjnego to maksymalna wypłata węzłów losowych, które po nim występują, co wskazuje również, którą alternatywę decyzyjną należy wybrać w danym węźle. Użyteczność drzew decyzyjnych może być znacznie zwiększona, jeśli prawdopodobieństwa każdego możliwego wyniku są obliczone w tym samym czasie, kiedy są określone wyniki działań. Dokonuje się tego stosując prawdopodobieństwa warunkowe ([1], [4–5], [13], [15]).

11.2. Przypadek jednoetapowej decyzji

Kierownik – decydent z firmy INSTALATOR rozważa zamówienie 1 000 lub 2 000 sztuk kształtek po cenie 700 zł za sztukę. Kierownik może też zachować się pasywnie i wcale nie zamawiać kształtek. Występuje tu następujący element ryzyka: Jeśli popyt na kształtki będzie w następnym okresie (np. wiosną, kiedy rozpoczyna się roboty ziemne) duży, to będzie można mieć znaczny dochód. Jeśli popyt będzie niewielki, co spowodowane może być złą koniunkturą (przedłużający się okres zimy, brak nowych frontów robót – można wiele stracić. Kierownik przewiduje, że uda się osiągnąć cenę sprzedaży (po wbudowaniu kształtki) na poziomie 850 zł. Niewbudowany asortyment (do wiosny następnego roku) może być sprzedany zaledwie po 300 zł za sztukę. Analizę drzewa decyzyjnego dla powyższego problemu przedstawiono na rysunku 11.1.

Popyt może przybierać wartości $n = 1000$ lub $n = 2000$ sztuk. INSTALATOR może podjąć trzy decyzje oznaczone x_A , x_B oraz x_C . Po prawej stronie (rys.11.1) naniesione zostały wartości tych decyzji (dochód). Określenie dochodu dokonuje się następująco: przy zamówieniu 1 000 sztuk kształtek (x_B) i przy popycie $n = 1 000$ zyskamy na różnicy cen, czyli $850 - 700 = 150$ zł. Łącznie uzyskamy 150 000 zł. W kolejnym wariantcie uzyskamy również 150 000 zł mimo zwiększonego popytu.



Rys. 11.1. Drzewo decyzyjne dla problemu INSTALATORA

Kolejną wartość na rysunku, to ujemny dochód rządu – 250 000 zł. Zamówienie jest planowane na 2 000 sztuk (decyzja x_C) a popyt może być jedynie na poziomie 1000 sztuk. Nie sprzedane kształtki to 1000 sztuk, które można będzie sprzedać na wiosnę ale po niższej cenie, tj. 700 – 300, czyli po 400 zł za kształtkę, co daje stratę w wysokości – 400 000 zł. Jednakże w tym czasie sprzedamy tysiąc sztuk po 850 zł (przy cenie zakupu 700 zł), co daje 150 000 dochodu. Łącznie na tym wariantcie możemy mieć stratę rządu – 250 000 zł (150 tys. – 400 tys.).

Największy dochód INSTALATOR osiągnąłby przy zamówieniu 2 tys. sztuk i przy takim samym popycie, tj. $(850 - 700) \cdot 2\,000 = 300\,000$ zł.

Należy jeszcze określić wartości oczekiwane (kosztu/dochodu) w węzłach losowych $ED(x_j)$. Zwróćmy uwagę na fakt, że dla INSTALATORA prawdopodobieństwa zaistnienia każdego z rozważanych wariantów sytuacji jest takie samo i wynosi 0,5. Dla pierwszego węzła logicznego (od góry) otrzymujemy:

$$ED(x_B) \quad 0,5 \cdot 150\,000 + 0,5 \cdot 150\,000 = 150\,000 \text{ zł,}$$

co wpisujemy w tym przypadku nad węzłem. Dla drugiego węzła logicznego:

$ED(x_C) = 0,5 \cdot (-250\,000) + 0,5 \cdot 300\,000$, co daje zaledwie 25 000 zł. Dla porządku ścieżki (warianty) niekorzystne oznaczamy //. Zatem najkorzystniejszym wariantem dla INSTALATORA będzie decyzja x_B , tj. zamówienie 1 000 sztuk kształtek.

Przedstawione rozważania dotyczą jednego okresu, stąd przykład ten ilustruje tzw. decyzje jednoetapowe. Nie zdobywa się w tym czasie dodatkowych informacji, które mogą mieć bardzo istotny wpływ na wynik rozważań. Taki przypadek jest bogato prezentowany w literaturze – np. [1–2], [4–8], [14]. Przypadek decyzji sekwencyjnych rozpatrzmy w następnym przykładzie.

11.3. Przypadek decyzji sekwencyjnych

Poprzedni przykład nieco rozbudujemy. Decydent może odłożyć decyzję w czasie na kupno kształtek do późnej jesieni roku bieżącego. Wówczas mógłby nabyć kształtki, ale po cenie większej, tj. po 750 zł za sztukę. W okresie zimowym mógłby przygotować z nich komplety, aby wczesną wiosną, wraz z robotami ziemnymi, przystąpić do ich wbudowywania. Z doświadczeń decydenta wynika, że istotny wpływ na ceny w roku następnym ma sezonowość.

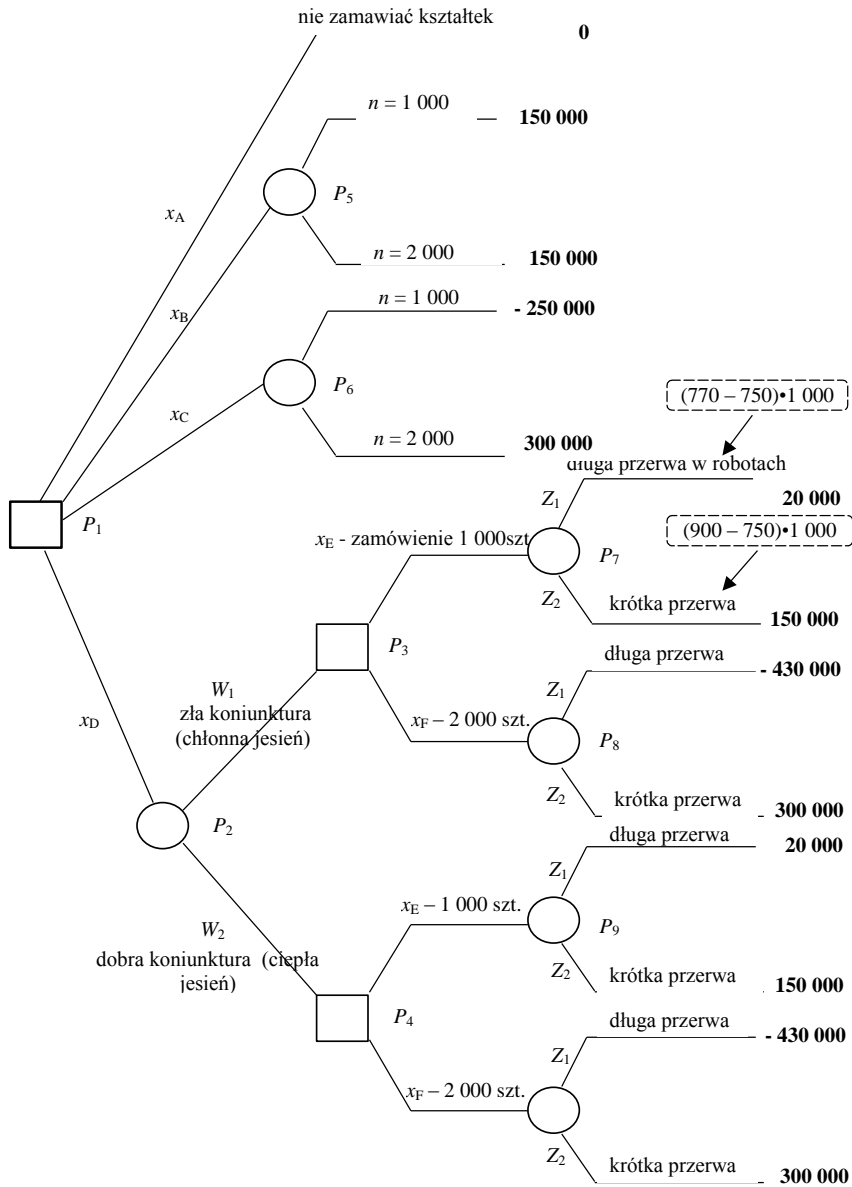
Przy krótkim sezonie zimowym wzrasta popyt, jest więcej otwartych frontów inwestycyjnych. Decydent zakłada, że popyt na jego kształtki wyniesie co najmniej 2 tys. sztuk, a cena zbytu (po wbudowaniu) wyniesie aż 900 zł za sztukę. Przy długim okresie zimowym popyt na jego wyroby będzie znacznie mniejszy, tj. zaledwie 1 tys. sztuk kształtek, a cena sprzedaży wyniesie zaledwie 770 zł za sztukę.

Sekwencje INSTALATORA przedstawia rysunek 11.2, na którym naniesiono po prawej stronie spodziewane wyniki. Dla gałęzi dotyczącej zdarzenia Z_1 otrzymujemy: $(770 - 750) \cdot 1\ 000 = 20\ 000$. Dla gałęzi ze zdarzeniem Z_2 : $(900 - 750) \cdot 1\ 000 = 150\ 000$. Analogicznie postępujemy z kolejnymi gałęziami.

Otrzymaliśmy w ten sposób następujący obraz. Kierownik INSTALATORA decyduje o tym, czy podejmować działalność. Jeśli tak, to czy składać zamówienie na kształtki korzystając z promocyjnej ceny – warianty x_B oraz x_C , czy też wstrzymać się z decyzją (kupnem) – wariant x_D – aby wykorzystać dodatkowe informacje o koniunkturze i sezonowości. W wariancie x_D dopiero po uzyskaniu wspomnianych dodatkowych informacji decydent określi wielkość zamówienia. Decyzja o odłożeniu zakupu wymaga analizy dostępnych danych o koniunkturze i warunkach budowy. Bywa, że zwlekanie z zakupem może stać się nieopłacalne ze względu na ruch cen.

Zatem mamy tu do czynienia z ryzykiem, wynikającym z prognozowania wspomnianej koniunktury. Istotną rolę stają się liczba sytuacji losowych. Każdą z nich określamy prawdopodobieństwem ich wystąpienia. Przyjmijmy za [21] następujące oznaczenia:

- W_1 – zdarzenie polegające na wystąpieniu złej koniunktury dla budownictwa jesienią,
- W_2 – zdarzenie polegające na wystąpieniu dobrej koniunktury dla robót budowlanych jeszcze jesienią (np. temperatury powietrza),
- Z_1 – zdarzenie polegające na wystąpieniu długiej przerwy w robotach budowlanych,
- Z_2 – zdarzenie polegające na wystąpieniu krótkiej przerwy w robotach budowlanych, umożliwiającej otwarcie wielu frontów robót.



Rys. 11.2. Drzewo decyzyjne dla problemu INSTALATORA: sekwencje

W takiej sytuacji posługujemy się danymi historycznymi o sytuacji temperaturowej oraz sezonie „martwym” w budownictwie. Informacja taka może być przedstawiona następująco: w 75 przypadkach na 100 po złej koniunkturze jesienią (niskie temperatury) następował długi okres przestoju w budownictwie; po łagodnym okresie jesiennym w 10 na 100 przypadków następował krótki okres wstrzymania prac w okresie zimowym. Dane te przedstawia tablicy 11.1.

Tablica 11.1. Dane historyczne dotyczące koniunktury i sezonowości

Zdarzenia		Długi okres wstrzyma-	Krótki okres wstrzyma-	
		nia prac budowlanych	nia prac budowlanych	
		Z1	Z2	
Chłodna jesień	W1	75	25	100
Ciepła jesień	W2	10	90	100

Tak więc proces decyzyjny na tym etapie jest wzbogacony o nową porcję informacji. Najczęściej są to dane subiektywne, a prawdopodobieństwa subiektywne nazywać będziemy prawdopodobieństwami a priori.

Następnie obliczamy prawdopodobieństwo a priori tego, że jesienią koniunktura będzie niekorzystna oraz tego, że jesienne temperatury będą sprzyjające dla prowadzenia robót budowlanych. Korzystamy z tablicy 11.1:

$$P(W_1) = P(W_2) = \frac{100}{200} = 0,5.$$

Prawdopodobieństwa warunkowe tego, że po złej koniunkturze jesienią wystąpi zły okres dla budownictwa (długi okres zimowy):

$$P(Z_1 / W_1) = \frac{P(Z_1 \cap W_1)}{P(W_1)} = \frac{75}{100} = 0,75.$$

Kolejne prawdopodobieństwa warunkowe określimy w podobny sposób:

$$P(Z_2 / W_1) = \frac{25}{100} = 0,25,$$

$$P(Z_1 / W_2) = \frac{10}{100} = 0,1,$$

$$P(Z_2 / W_2) = \frac{90}{100} = 0,9.$$

Jak wspomniano, analizę decyzyjną drzewa zaczynamy od końców gałęzi, przesuwając się w kierunku pnia. Określamy węzły losowe. W węźle losowym P7 wartość oczekiwana dochodu wyniesie:

$$ED_7 = 0,75 \cdot 20\ 000 + 0,25 \cdot 150\ 000 = 52\ 500 \text{ zł.}$$

Dla kolejnych węzłów:

$$ED_8 = 0,75 \cdot (-430\ 000) + 0,25 \cdot 300\ 000 = -247\ 500,$$

$$ED_9 = 0,1 \cdot 20\ 000 + 0,9 \cdot 300\ 000 = 137\ 000,$$

$$ED_{10} = 0,1 \cdot (-430\ 000) + 0,9 \cdot 300\ 000 = 227\ 000.$$

Na tym etapie rozważań będziemy stosowali kryterium maksymalizacji korzyści (dochodu). W każdym węźle decyzyjnym wybieramy maksymalną wartość oczekiwaną dochodu. Dla węzłów P3 oraz P4 otrzymujemy:

$$ED_3 = \max \{52\ 000; -247\ 000\} = 52\ 000,$$

$$ED_4 = \max \{137\ 000; 227\ 000\} = 227\ 000.$$

Dla węzła początkowego D₁ otrzymujemy:

$$ED_1 = \max \{0; 150\ 000; 25\ 000; 227\ 000\} = 227\ 000.$$

Wyniki naniesiono na drzewo - rys. 11.3.

Dla decydenta wynik nie jest zaskoczeniem. Skorzystał z dodatkowych informacji, podbudowując decyzje o odłożeniu zamówienia. Zatem najkorzystniejszą decyzją jest wstrzymanie się aż do symptomów lepszej koniunktury i dopiero wówczas złożyć zamówienie. Decyzja D₄ jest w tym przypadku właściwą. W dalszej kolejności pod względem dochodu znajduje się decyzja D₅ (150 000 zł dochodu): od razu inwestować, wykorzystując bieżącą koniunkturę cen.

W przypadku INWESTORA opłaciło się pozyskać dodatkową wiedzę. Pozyskanie dodatkowych informacji często wiąże się z wydatkiem, który powinien być uwzględniony w analizie. Oczywiście jest, że przy innej konfiguracji danych (jak w tabelicy 11.1) możemy otrzymać inny wynik. Wpływ informacji na wynik w procesie podejmowania decyzji w warunkach niepewności jest istotny. Prześledzimy to na tym samym przykładzie lecz nieco zmieniając dane historyczne z tabelicy 11.1. (jedynie zmiana jednego wiersza). Nowe dane zestawiono w tabelicy 11.2.

Wówczas:

$$P(W_1) = P(W_2) = 0,5,$$

$$P(Z_1/W_1) = 0,75,$$

$$P(Z_2/W_1) = 0,25,$$

$$P(Z_1/W_2) = 0,4,$$

$$P(Z_2/W_2) = 0,6.$$

Wartości oczekiwane dochodu wynoszą:

$$ED_7 = 52\ 500,$$

$$ED_8 = -247\ 500.$$

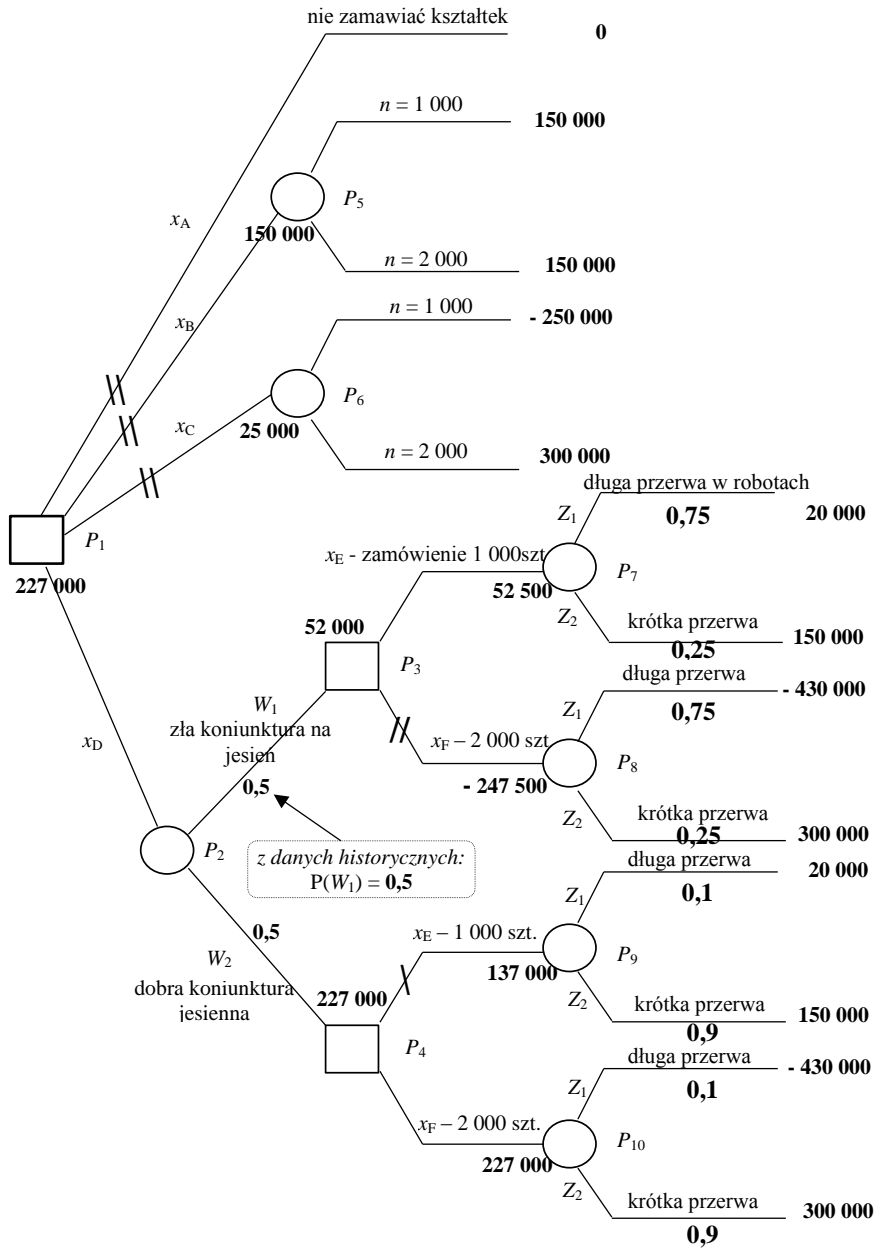
Natomiast nowe wartości:

$$ED_9 = 0,4 \cdot 20\ 000 + 0,6 \cdot 150\ 000 = 98\ 000,$$

$$ED_{10} = 0,4 \cdot (-430\ 000) + 0,6 \cdot 300\ 000 = 8\ 000.$$

$$ED_3 = 52\ 500; ED_4 = 98\ 000, \text{ natomiast } ED_1 = 150\ 000.$$

Ten wynik sugeruje INSTALATOROWI wybór wariantu x_B, co diametralnie zmieniłoby planowanie robót w tej firmie.



Rys. 11.3. Analiza decyzyjna

Tablica 11.2. Dodatkowe dane historyczne (wariant II)

	Z ₁	Z ₂
W ₁	75	25
W ₂	40	60

Dalej:

Problem pozyskania dodatkowej informacji wiąże się z opisem stanów środowiska (świata) zewnętrznego oraz określeniem wartości informacji. Z tą problematyką związane są trzy pojęcia:

- (1) Reguła racjonalnego pozyskiwania informacji: przyrost oczekiwanego zysku w wyniku pozyskania dodatkowej informacji (wiedzy) powinien przewyższać koszt pozyskanej informacji;
- (2) Maksymalizacja wartości oczekiwanej: kryterium to pozwala oszacować przyszłą wartość osiągniętego dochodu. Reguła ta jest w pełni uzasadniona w przypadkach, gdy proces decyzyjny jest powtarzany wiele razy w tych samych warunkach;
- (3) Maksymalizacji oczekiwanej użyteczności: w tej samej sytuacji różni decydenci, mając tę samą wiedzę o rozpatrywanym zjawisku, mogą podjąć zupełnie odmienne decyzje. Reguła ta uwzględnia problem skłonności do ryzyka.

11.4. Użyteczność decyzji

W dalszej kolejności zajmiemy się maksymalizacją oczekiwanej użyteczności. Jak wspomnieliśmy, kryterium maksymalizacji oczekiwanych (spodziewanych) korzyści jest uzasadnione w specyficznych warunkach (por. pkt 2 powyżej). W przypadku decyzji jednorazowej, nie będzie właściwa analiza oparta na kryterium maksymalizacji spodziewanych korzyści, lecz analiza uwzględniająca preferencje decydenta, a więc oparta na kryterium maksymalizacji spodziewanych użyteczności (por. pkt 3 powyżej).¹⁷

Użyteczność, inaczej cenność, to relatywna wartość możliwych wyników decyzji, biorąca pod uwagę preferencje decydenta. Mamy tu do czynienia z subiektywną miarą cenności określonych wyników decyzji lub stopniem zadowolenia decydenta z osiągniętych korzyści. Tymi zagadnieniami zajmuje się teoria użyteczności, dobrze opisana w literaturze, np. przez W. Sadowskiego [16]. Porównaj także: [3], [6, 7], [12], [19], [22].

W problemie INSTALATORA mamy sześć możliwych wyników: -430 000; -250 000; 0; 20 000; 150 000; 300 000. Ponieważ skala użyteczności jest dyskrecjonalna, możemy przyjąć, że użyteczności (U) skrajnych wyników wynoszą:
 $U(300\ 000) = 1$ i $U(-430\ 000) = 0$.

¹⁷ W praktyce dominują decyzje jednorazowe. Na przykład, decydent – właściciel małej firmy może w konkretnym przypadku obawiać się straty (przy dużym prawdopodobieństwie) związanej z kontraktem. Podpisuje gorszy – na podstawie kryterium maksymalizacji spodziewanych korzyści – lecz który ryzykuje poniesienie znacznie mniejszej straty z mniejszym prawdopodobieństwem. Stanowisko decydenta (właściciela) będzie zależało od jego postawy (resentymentu lub predylekcji) wobec ryzyka, wynikającej z takich czynników, jak sytuacja majątkowa firmy lub jej sytuacja w zakresie płynności finansowej a także osobistych cech charakteru.

Następnie należy określić użyteczności wyników pośrednich. Istnieje kilka sposobów określania użyteczności wyników pośrednich. Na przykład T. Trzaskalik [21] proponuje stosowanie dwóch funkcji użyteczności:

$$U_1(x) = \begin{cases} 10\sqrt{x} & \text{dla } x \geq 0, \\ \frac{-x^2}{10} & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

oraz

$$U_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{10} & \text{dla } x \geq 0, \\ -10\sqrt{x} & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Pierwsza z nich opisuje zachowanie się decydenta z awersją do ryzyka, a druga opisuje zachowanie się decydenta ze skłonnością do ryzyka. Gdyby założyć, że nasz kierownik z firmy INSTALATOR preferowałby funkcję U_1 , czyli miał awersję do ryzyka, to zakupienie aż 2 tys. kształtek (jak w przykładzie) będzie z pewnością decyzją dla niego zbyt ryzykowną.

Innym sposobem określania użyteczności wyników pośrednich będzie postawienie decydenta przed wyborem między pewnością danego wyniku a loterią (grą) między dwoma skrajnymi wynikami. Taki sposób możemy znaleźć między innymi w pracach [21] i [22].

Naszego określonego decydenta (INSTALATORA) należy poprosić o dokonanie wyboru między możliwością pierwszą - oznaczającą pewny wynik (kolejno 150 000, 20 000, 0, -250 000, -430 000) - oraz możliwością drugą, tj. loterią (grą), w której może wystąpić 300 000 z prawdopodobieństwem p lub -430 000 z prawdopodobieństwem $1 - p$. Przy $p = 0$ decydecnt wybierze oczywiście pewne 150 000, ale zwiększając prawdopodobieństwo wygrania 300 000 dojdziemy do takiego rozkładu prawdopodobieństwa, gdzie obie możliwości będą dla decydenta równorzędne (jednakowo dobre). Mogłoby to się zdarzyć przy prawdopodobieństwie 0,95 wygrania 300 000 i prawdopodobieństwie 0,05 straty 430 000:

$$150\text{tys. (pewne)} \quad \left| \begin{array}{cc} 300\text{tys.} & p \\ -430\text{tys.} & 1-p \end{array} \right.$$

Zatem, $U(150\ 000) = U(300\ 000) \cdot 0,95 + U(-430\ 000) \cdot 0,05 = 1 \cdot 0,95 + 0 \cdot 0,05 = 0,95$.

Podobnie postępujemy z następną kwotą: prawdopodobieństwo, przy którym decydecnt nie ma preferencji wyboru, dla 20 tys. zł wynosi 0,75:

$$20\text{tys. (pewne)} \quad \left| \begin{array}{cccccc} 300\text{tys.} & p & 0 & 0,1 & \dots & 0,75 \\ -430\text{tys.} & 1-p & 1 & 0,9 & \dots & 0,25 \end{array} \right.$$

stąd: $U(20\ 000) = U(300\ 000) \cdot 0,75 + U(-430\ 000) \cdot 0,25 = 0,75$.

W podręcznikach (godnych polecenia) T. Tyszki i T. Zalaśkiewicza [22] oraz J. Supernata [19] mamy szereg przykładów zastosowania tej procedury określania użyteczności wyników pośrednich¹⁸.

Dla potrzeb dydaktycznych określimy dwie funkcje użyteczności, obrazujące dwie postawy wobec ryzyka. W tabelicy 3 zestawiono uzyskane wyniki dla potrzeb rozpatrywanego problemu INSTALATORA. Graficzna interpretacja awersji i skłonności do ryzyka przedstawiona jest na rys 11.4.

Tabela 11.3. Dwa warianty postaw decydenta wobec ryzyka

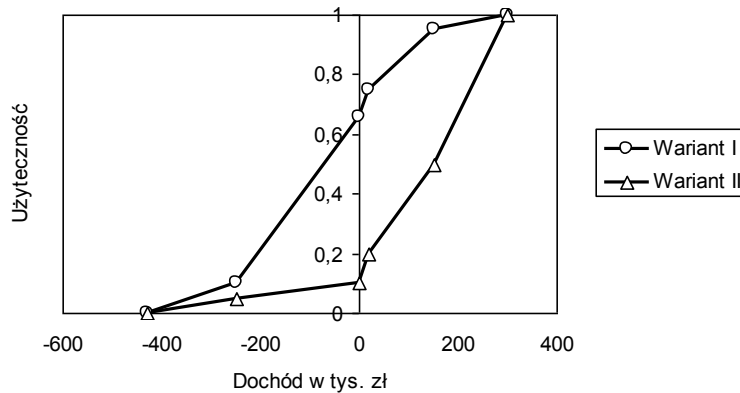
Wynik (dochody) zł	Użyteczności	
	Wariant I	Wariant II
300 000	1	1
150 000	0,95	0,50
20 000	0,75	0,2
0	0,66	0,1
- 250 000	0,1	0,05
- 430 000	0	0
	<i>Decydent z awersją do ryzyka</i>	<i>Decydent o skłonności do ryzyka</i>

¹⁸Wyjaśnijmy za [22] sposób określania użyteczności na podstawie wspomnianej loterii (grze). Prosimy kierownika by wziął udział w następującym „badaniu”.

Badanie 1: Zastanów się i powiedz, jaka jest najwyższa suma pieniędzy, którą zapłaciłbyś za zakład (za prawo udziału w nim)? Jeśli wypadnie orzeł, otrzymasz 1 000 zł, jeśli reszka, nic nie uzyskasz. Odpowiedź kierownika: *Przypuścimy, że 100 zł*. Oznacza to, że dla kierownika użyteczność (subiektywna wartość) 100 zł otrzymanych na pewno jest identyczna z następującą kombinacją użyteczności: $\frac{1}{2} \cdot U(1\ 000\ \text{zł}) + \frac{1}{2} \cdot U(0\ \text{zł})$. Formalnie: $U(100) = 0,5 \cdot U(1\ 000) + 0,5 \cdot U(0)$. Możemy użyteczność 1 000 zł oznaczyć przez 1, a użyteczność 0 zł przez 0. Z powyższego równania wynika, że znaleźliśmy odpowiednik użyteczności równej 0,5, albowiem: $0,5 \cdot (0) + 0,5 \cdot (1) = 0,5$.

Badanie 2: Jaka jest najwyższa suma pieniędzy, którą zapłaciłbyś za podobny zakład, ale za orła otrzymałbyś 100 zł, za reszkę nic nie uzyskasz? Odpowiedź: *Przypuścimy, że 25 zł*. Zatem: $U(25\ \text{zł}) = \frac{1}{2} \cdot U(100\ \text{zł}) + \frac{1}{2} \cdot U(0\ \text{zł})$, znaleźliśmy odpowiednik użyteczności równej 0,25.

Podobnie przeprowadzamy dalsze badania. Już przy dwóch badaniach otrzymujemy trzy punkty tworzące wykres funkcji użyteczności kierownika dla kwot pieniędzy od 0 zł do 1 000 zł. Na osi rzędnych oznaczamy użyteczności (od 0 do 1), na osi odciętych wartości w złotych, w tym przypadku od 0 do 1 000. Oczywiście jest, że prawdopodobieństwa losowania orła i reszki są sobie równe i wynoszą $\frac{1}{2}$.



Rys. 11.4. Dwa warianty krzywych użyteczności dla problemu INSTALATORA

Wyniki analizy naniesiono na drzewo – rys. 11.5. W pierwszej kolumnie po prawej stronie przedstawiono użyteczności dla wariantu I i odpowiednio w drugiej kolumnie dla wariantu II. Wyniki analizy dla wariantu I zapisano nad zdarzeniami, natomiast wyniki dla wariantu II pod zdarzeniami (kursywą).

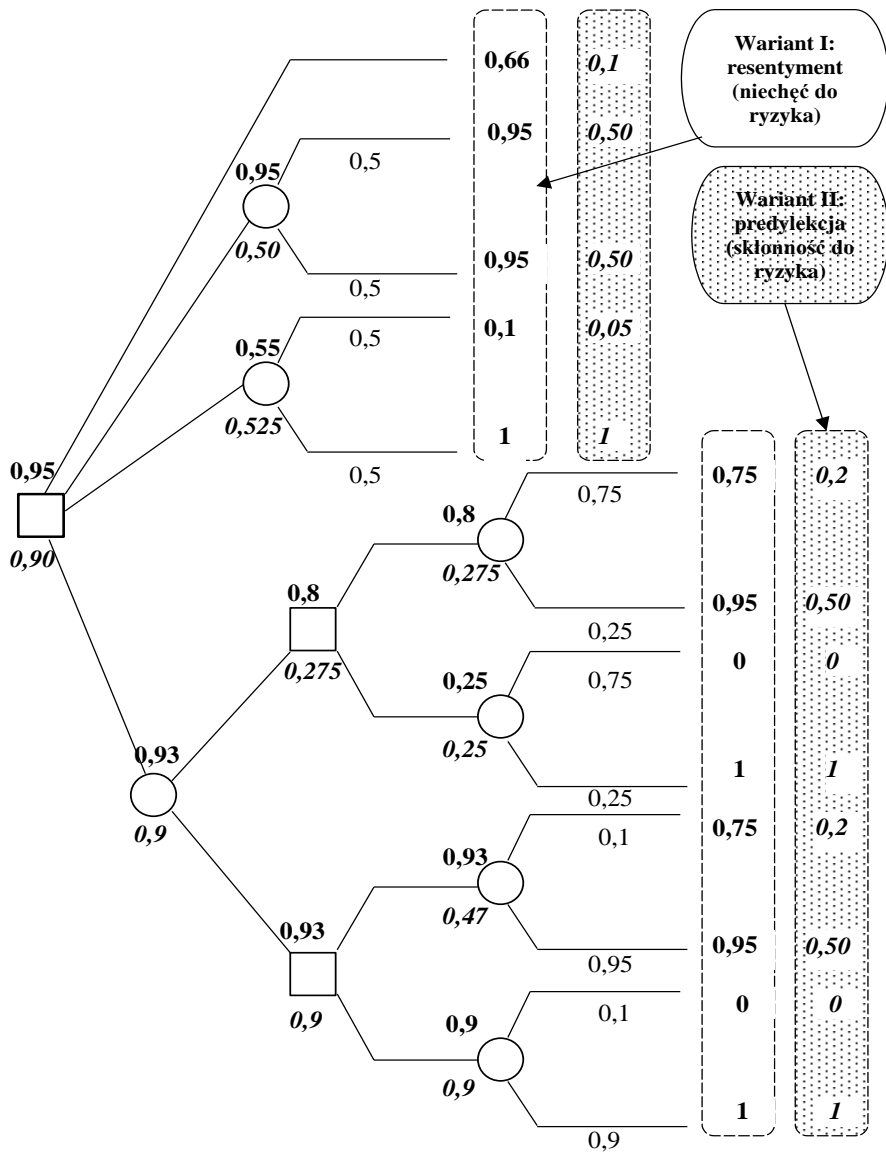
W pierwszym przypadku (wariant I) mamy do czynienia z decydem, który ma wyraźną awersję do ryzyka i który będzie preferował wybór wariantu x_B , natomiast w drugim przypadku (wariant II) mamy do czynienia z decydem z większą skłonnością do ryzyka. Taki decydent wybierze wariant decyzyjny x_F i Z_2 , tj. odczeka na odpowiednią sytuację i zakupi od razu 2 tys. sztuk kształtek. Zakłada on ponadto, krótszą przerwę w pracy na budowie, dzięki czemu może osiągnąć dochód 300 000 zł.

11.5. Komentarze

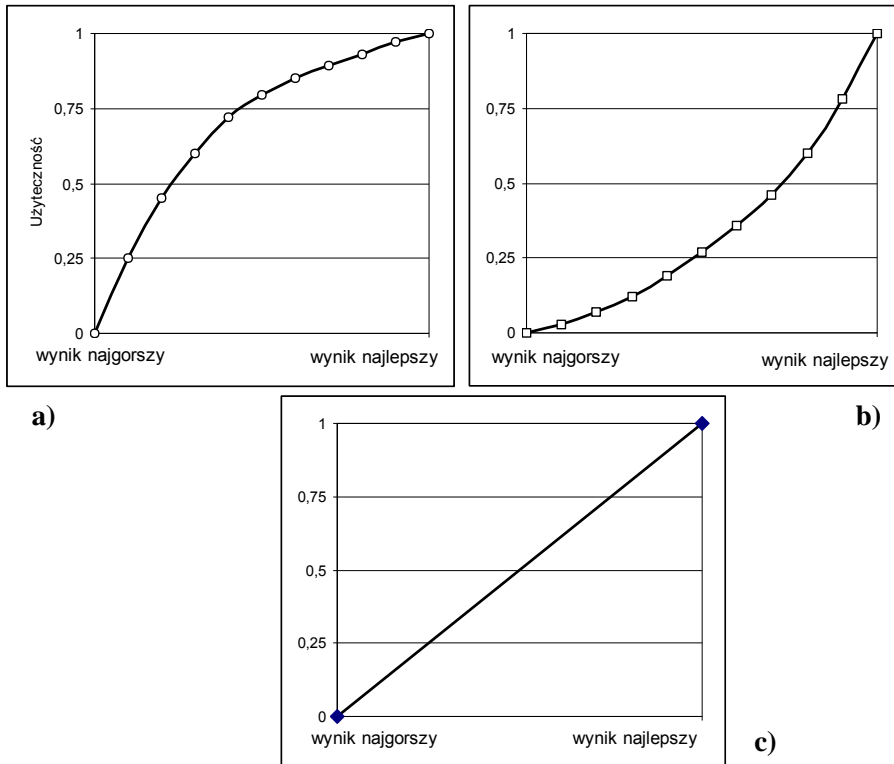
Analiza przedstawiona na rys. 11.4 oraz 11.5 wskazuje na znaczenie postaw decydenta wobec ryzyka. Wyrażeniem postawy decydenta jest krzywa użyteczności. Najczęściej jest to subiektywna ocena postaw. Generalnie możemy wyróżnić trzy typy krzywych użyteczności. Zestawiono je na rys. 11.6.

Krzywa (a) o kształcie wklęsłym obrazuje różne stopnie resentmentu (czyli niechęci) wobec ryzyka. W życiu codziennym występuje ten przypadek bardzo często, albowiem większość (kierownictwo i personel) jest ostrożna. Krzywa (b) o kształcie wypukłym właściwa jest decydem o większej lub mniejszej predylekcji (czyli skłonności) do ryzyka.

Zauważmy, jeśli krzywa (a) lub (b) została narysowana dokładnie, to można dla ustalenia optymalnej strategii posłużyć się wartościami użyteczności zamiast operować wielkościami finansowymi (por. analizę przedstawioną na rys. 11.5).



Rys. 11.5. Wyniki analizy przy zastosowaniu dwóch funkcji użyteczności



Rys 11.6. Powszechne trzy przypadki krzywych użyteczności: a) decydent z awersją do ryzyka, b) decydent ze skłonnością do ryzyka, c) brak resentymentu jak i predylekcji do ryzyka

Prosta (c) charakteryzuje osoby o braku zarówno resentymentu, jak i predykcji do ryzyka. W tym przypadku, jeśli przetworzylibyśmy efekty finansowe na użyteczności za pomocą prostej, zmieniłoby to jedynie skalę wyników, a zastąpienie tych rezultatów odpowiadającymi im użytecznościami nie wpłynęłoby na zmianę wyboru najlepszego działania. Oznacza to, że w przypadku (c) decydent nie musi posiłkować się użytecznościami.

W praktyce krzywa użyteczności może zawierać elementy krzywych (a), (b) oraz (c). Często osoby na kierowniczych stanowiskach wykazują resentyment wobec ryzyka w wyższych rejonach takiej krzywej i jednocześnie predylekcję do ryzyka w dolnych rejonach krzywej. Wówczas krzywa użyteczności przybiera kształt zbliżony do litery S.

Istotną rolę w analizie drzewa decyzyjnego odgrywa informacja, jak również stosowane kryteria. Jeśli pozyskanie informacji jest kosztem, to należy uwzględnić tę pozycję w drzewie decyzyjnym. Na ogół posiłkujemy się modelami upraszczającymi rzeczywistość. Jest to możliwe, jednakże powinniśmy zdawać sobie sprawę z wartości modelu i otrzymanych wyników. W analizie przykładu (w tym rozdziale) został pominięty problem dyskonta wpływów. Jest to istotne na przykład w przy-

padku decyzji inwestycyjnych. Zasady analizy nie uległyby zmianie. Należałoby jednakże, przy stopie oprocentowania większej od zera, uwzględnić terminy wpływów i wydatków.

Również istotny wpływ na modelowanie procesu decyzyjnego za pomocą drzew celów mają przyjęte kryteria. W ramach omawianego przykładu poznaliśmy dwa kryteria: maksymalizacji oczekiwanych korzyści oraz maksymalizacji spodziewanych użyteczności. Bardziej wyrafinowana analiza drzew decyzyjnych polega na stosowaniu następujących kryteriów:

- kryterium pesymizmu, polegającym na wyborze decyzji najlepszej z najgorszych. W skrócie kryterium to ma zapis $\max\text{-min}$ (w przypadku zysków) lub $\min\text{-max}$ (w przypadku kosztów).
- kryterium optymizmu, polegającym na wyborze decyzji najlepszej z najlepszych, w skrócie $\max\text{-max}$ (w przypadku zysków) i odpowiednio $\min\text{-min}$ (w przypadku kosztów),
- kryterium minimalizacji (lub maksymalizacji) żalu, zwanym kryterium L. J. Savage, również w skrócie zapisywanym $\min\text{-max}$.

Wszystkie wymienione powyżej kryteria są charakterystyczne dla modeli podejmowania decyzji w warunkach niepewności i są przede wszystkim stosowane w modelach teoriogrowych [10].

11.6. Literatura

- [1] Andrzejczak K., Elementy analizy decyzyjnej, Poznań, Wydaw. K.Andrzejczak 1992.
- [2] Anholcer M., Gaspars H., Owczarkowski A., Przykłady i zadania z badań operacyjnych i ekonometrii, Poznań, Wydaw. Akademii Ekonomicznej w Poznaniu 2005.
- [3] Decyzje menedżerskie z Exelem, red. T.Szapiro, Warszawa, PWE 2000.
- [4] Gaspars-Wieloch H., Drzewa decyzyjne – zarządzanie ryzykiem projektów, kbo.ue.poznan.pl/gaspars/def_wzory_zarzadzanie_ryzykiem.pdf
- [5] Heilpern S., Podejmowanie decyzji w warunkach ryzyka i niepewności, Wrocław, Wydaw. Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu 2001.
- [6] Kapliński O., Risk management of construction works by means of the utility theory: a case study. *Procedia Engineering*. Elsevier, 2013, Volume 57, 533-539.
- [7] Kapliński O., The utility theory in maintenance and repair strategy. *Procedia Engineering*, 2013, Elsevier, Edited by Franz Nestmann, Erik Schlangen and Sholihin As'ad, Vol. 54, 604-614.
- [8] Kopańska-Bródka D., Wprowadzenie do badań operacyjnych, wyd. 2, Katowice, Wydaw. Akademii Ekonomicznej w Katowicach, 1998.
- [9] Krzakiewicz K., Podejmowanie decyzji kierowniczych, Poznań, Wydaw. Akademii Ekonomicznej w Poznaniu 1993.
- [10] Luce R.D., Raiffa H., Gry i decyzje, Warszawa, PWN 1964.
- [11] Miller D.W., Starr M.K., Praktyka i teoria decyzji, Warszawa, PWN 1971.
- [12] Mitchell G.H., Badania operacyjne. Metody i przykłady, Warszawa, WNT 1977.

- [13] Modelowanie preferencji a ryzyko, red. T.Trzaskalik, Katowice, Wydaw. Akademii Ekonomicznej w Katowicach 2008.
- [14] Moore P.G., Wprowadzenie do badań operacyjnych, Warszawa, WNT 1973.
- [15] Pankowski T., Drzewa decyzyjne, www.put.poznan.pl/~pankowsk.
- [16] Sadowski W., Decyzje i prognozy, Warszawa, PWE 1981.
- [17] Samuelson W.F., Marks S.G., Ekonomia menedżerska, Warszawa, PWE 1998.
- [18] Tamošaitienė J., Kapliński O., Strategic environmental assessment (SEA) of socio-economic systems: a systematic review. *Technological and Economic Development of Economy*, 2013, Vol. 19(4), 661–674.
- [19] Stodulny P., Drzewa decyzyjne, [w] W.Sikora (red.), *Badania operacyjne*, Warszawa, PWE 2008.
- [20] Supernat J., *Techniki decyzyjne i organizatorskie*, wyd. 2, Wrocław, Kolonia Limited 2003.
- [21] Trzaskalik T., *Wprowadzenie do badań operacyjnych z komputerem*, Warszawa, PWE 2003.
- [22] Tyszka T., Zalaśkiewicz T., *Racjonalność decyzji*, Warszawa, PWE 2001.